УДК 514.75

В. С. Малаховский, Е. П. Юрова
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

Конгруэнции линейчатых квадрик с двумя двукратными фокальными поверхностями

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются двупараметрические семейства (конгруэнции) V_2 линейчатых невырожденных квадрик Q с двумя невырожденными двукратными фокальными поверхностями. Доказано, что такие конгруэнции существуют и определяются с произволом пяти функций двух аргументов. С использованием компьютерной программы продолжений [1] рассмотрены четыре подкласса конгруэнций V_2. Установлено, что если точки A_1 и A_2 пересечения прямолинейных образующих квадрики Q, проходящих через фокальные точки A_0 и A_3 произвольной конгруэнции V линейчатых невырожденных квадрик Q также являются фокальными, то $V \subset V_2$.

Ключевые слова: квадрика, линейчатая поверхность, репер, система уравнений Пфаффа, фокальная точка, результант.

1. Общая характеристика конгруэнции линейчатых невырожденных квадрик

Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве P_3 двупараметрическое семейство (конгруэнцию) V линейчатых невырожденных квадрик Q [2, с. 52]. Отнесем конгруэнцию V к геометрически фиксированному реперу $\Re = \left\{ \overline{A}_0, \overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3 \right\}$, где A_0 и A_3 — фокальные точки квадрики $Q \in V$, не лежащие на одной прямолинейной образующей, A_1 и A_2 — точки пересечения прямолинейных образующих, проходящих через фокальные точки A_0 и A_3:

$$A_1 \equiv A_0A_1 \cap A_3A_1,\ A_2 \equiv A_0A_2 \cap A_3A_2 .$$

При надлежащей нормировке вершин A_α репера $\Re(\alpha,\beta,\gamma=0,1,2,3)$ уравнение квадрики Q запишется в виде

$$F \overset{def}{=} x^1x^2 - x^0x^3 = 0 . \qquad (1.1)$$

Используя деривационные формулы

$$d\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta$$

репера $\Re$ и формулы стационарности точки $M(x^\alpha) \in P_3$

$$dx^\alpha = -x^\beta \omega_\gamma^\alpha + \theta x^\alpha,\ d\theta = 0,$$

находим систему уравнений Пфаффа конгруэнции V в виде

$$\begin{cases} \omega_1^3 = a_{11}\omega^1 + a_{12}\omega^2,\ \omega_2^3 = a_{12}\omega^1 + a_{22}\omega^2, \\ \omega_1^0 = b_1\omega^1 + b\omega^2,\ \omega_2^0 = b\omega^1 + b_2\omega^2, \\ \omega_1^2 = c_{11}\omega^1 + c_{12}\omega^2,\ \omega_2^1 = c_{21}\omega^1 + c_{22}\omega^2, \\ \omega_3^1 = k_{11}\omega^1 + k_{12}\omega^2,\ \omega_3^2 = k_{21}\omega^1 + k_{22}\omega^2, \\ \omega_1^1 + \omega_2^2 = h_1\omega^1 + h_2\omega^2,\ \omega_0^3 = 0,\ \omega_3^0 = 0. \end{cases} \qquad (1.2)$$

где $\omega^1 \overset{def}{=} \omega_0^1,\quad \omega^2 \overset{def}{=} \omega_0^2$.

Теорема 1.1. *Конгруэнции V существуют и определяются с произволом семи функций двух аргументов.*

Доказательство. Анализируя систему (1.2.), убеждаемся, что $S_1 = 9$, $q = 16$, $S_2 = 7$, $Q = N$ (см.: [3, с. 51—54]).

Система (1.4.) инволюции и определяет решение с произволом семи функций двух аргументов, ч. т. д.

Фокальные точки квадрики $Q \in V$ определяются системой алгебраических уравнений

$$F = 0,\ F_1 = 0,\ F_2 = 0, \qquad (1.3)$$

где

$$F_1 \stackrel{def}{=} c_{11}(x^1)^2 + c_{21}(x^2)^2 + 2h_1 x^1 x^2 + (k_{21} - b_1)x^1 x^3 +$$
$$+(k_{11} - b)x^2 x^3 - x_{11} x^0 x^1 + (1 - a_{12})x^0 x^2,$$
$$F_2 \stackrel{def}{=} c_{12}(x^1)^2 + c_{22}(x^2)^2 + 2h_2 x^1 x^2 + (k_{22} - b)x^1 x^3 +$$
$$+(k_{12} - b_2)x^2 x^3 + (1 - a_{12})x^0 x^1 - a_{22} x^0 x^2.$$

Из выражения (1.3) следует, что в общем случае конгруэнция V имеет восемь фокальных поверхностей.

2. Конгруэнции V_2

Определение 2.1. *Конгруэнцией V_2 называется конгруэнция V с двумя двукратными фокальными поверхностями (A_0) и (A_3).*

Переходя к неоднородным координатам по формулам

$$x = \frac{x^1}{x^0}, y = \frac{x^2}{x^0}, z = \frac{x^3}{x^0} \vee \tilde{x} = \frac{x^1}{x^3}, \tilde{y} = \frac{x^2}{x^3}, \tilde{z} = \frac{x^0}{x^3}$$

и используя результанты в уравнениях $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ для исключения (после исключения координаты Z) координаты y и $\tilde{y}$, убеждаемся, что условия двукратности фокальных поверхностей в каноническом репере ($b_1 = 1$, $b_2 = 1$) имеют следующий вид:

$$\begin{cases} ((1 - a_{12})^2 - a_{11}a_{22})(c_{21}a_{12} + c_{12}(1 - a_{12}) = 0 \\ (c_{21}(1 - k_{12}) + c_{22}(k_{11} - b))((k_{11} - b)(k_{22} - b) - \\ -(k_{12} - 1)(k_{21} - 1)) = 0. \end{cases} \qquad (2.1)$$

Теорема 2.1. *Конгруэнции V_2 существуют и определяются с произволом пяти функций двух аргументов.*

Доказательство. Продолжая систему уравнений

$$\begin{cases} \omega_1^0 = \omega^1 + b\omega^2, \\ \omega_2^0 = b\omega^1 + \omega^2, \end{cases} \tag{2.2}$$

находим:

$$db = b(A_1\omega^1 + A_2\omega^2)\,, \tag{2.3}$$

где

$$A_1 = c_{11} + c_{21} - 2(m_1 + n_1 + c_{12}),$$

$$A_2 = c_{22} + c_{12} + 2(m_2 + n_2 - h_1 - c_{21})\,. \tag{2.4}$$

Система уравнений Пфаффа конгруэнции V2 состоит из выражений (1.2), (2.3) и уравнений

$$\begin{cases} \omega_0^0 = m_1\omega^1 + m_2\omega^2, \\ \omega_1^1 = n_1\omega^1 + n_2\omega^2. \end{cases} \tag{2.5}$$

причем $b_1 = b_2 = 1$ имеет $S_1 = 12$, $q = 17$, $S_2 = 5$, $Q = 22 = N$.

Система — в инволюции и определяет решения с произволом пяти функций двух аргументов. Ч. т. д.

3. Подклассы конгруэнций $V_{2,1}$

Рассмотрим четыре подкласса конгруэнций V2, выделяемых системами конечных соотношений на коэффициенты пфаффовых уравнений системы (1.2).

Каждая из получаемых систем уравнений Пфаффа этих подклассов не в инволюции и требует для доказательства теорем существования сложных вычислений. В данной работе все эти теоремы существования доказываются с помощью компьютерной программы нахождения продолжений систем пфаффовых уравнений [1]. Мы ограничимся только формулировкой этих теорем.

п. 1 Конгруэнции $V_{2,0}$

Определение 3.1. *Конгруэнцией $V_{2,0}$ называется конгруэнция V с фокальными поверхностями (A_0), (A_3), (A_1), (A_2).*

Теорема 3.1. *Конгруэнции $V_{2,0}$ существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов, 10 функций одного аргумента и 25 произвольных постоянных.*

Из уравнений (1.4) следует, что A_1 и A_2 — фокальные точки, если

$$\omega_1^2 = 0,\ \omega_2^1 = 0\ . \tag{3.1}$$

Продолжая уравнения (3.1), находим

$$a_{11}k_{22} - a_{12}k_{21} + 1 = 0, \quad a_{12}k_{12} - a_{22}k_{11} - 1 = 0\ . \tag{3.2}$$

В результате продолжений системы уравнений Пфаффа конгруэнции $V_{2,0}$

$$\begin{cases} \omega_1^3 = a_{11}\omega^1 + a_{12}\omega^2, \omega_2^3 = a_{12}\omega^1 + a_{22}\omega^2, \\ \omega_1^0 = \omega^1 + b\omega^2, \omega_2^0 = b\omega^1 + \omega^2, \\ \omega_3^1 = k_{11}\omega^1 + k_{12}\omega^2, \omega_3^2 = k_{21}\omega^1 + k_{22}\omega^2, \\ \omega_1^1 + \omega_2^2 = h_1\omega^1 + h_2\omega^2, \\ \omega_1^2 = 0,\ \omega_2^1 = 0,\ \omega_0^3 = 0,\ \omega_3^0 = 0, \\ \omega_0^0 = m_1\omega^1 + m_2\omega^2,\ \omega_1^1 = n_1\omega^1 + n_2\omega^2 \end{cases} \tag{3.3}$$

Возникает еще одна связь:

$$k_{12} = b(k_{11} - k_{22}) + k_{21}\ . \tag{3.4}$$

Так как в силу уравнений (3.1) соотношения (2.1) обращаются в тождества, то $V_{2,0} \subset V_2$.

п. 2 Конгруэнции $V_{2,1}$

Определение 3.2. *Конгруэнцией $V_{2,1}$ называется конгруэнция V, для которой*

$$a_{11}=0,\ a_{22}=0,\ a_{12}=1,\ k_{12}=1,\ k_{21}=1,\ k_{11}=k_{22}=b\,. \qquad (3.5)$$

Соотношения (2.1) обращаются в тождества в силу выражения (3.5). Следовательно, $V_{2,1}\subset V$.

Теорема 3.2. *Конгруэнции $V_{2,1}$ существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов, 8 функций одного аргумента и 24 произвольных постоянных.*

В результате последовательных продолжений системы уравнений Пфаффа конгруэнции $V_{2,1}$

$$\begin{aligned}
&\omega_1^3=\omega^2,\ \omega_2^3=\omega^1,\ \omega_1^0=\omega^1+b\omega^2,\ \omega_2^0=b\omega^1+\omega^2,\\
&\omega_1^2=c_{11}\omega^1+c_{12}\omega^2,\ \omega_2^1=c_{21}\omega^1+c_{22}\omega^2,\\
&\omega_3^1=b\omega^1+\omega^2,\ \omega_3^2=\omega^1+b\omega^2,\ \omega_0^0=m_1\omega^1+m_2\omega^2, \qquad (3.6)\\
&\omega_1^1=n_1\omega^1+n_2\omega^2,\ \omega_1^1+\omega_2^2=h_1\omega^1+h_2\omega^2,\\
&\omega_0^3=0,\ \omega_3^0=0.
\end{aligned}$$

Наряду с общим результатом (теорема 3.2) возникает второй подкласс конгруэнций $V_{2,1}$ — конгруэнции $V'_{2,1}$:

Теорема 3.3. *Конгруэнции $V'_{2,1}$ удовлетворяют соотношениям*

$$c_{12}=c_{22}=h_1;\ c_{11}=c_{21}=h_2;\ 2h_1n_1+h_2^2-h_1^2-2h_2n_2=0\,. \quad (3.7)$$

Они существуют и определяются с произволом пяти функций одного аргумента и 20 произвольных постоянных.

Теорема 3.4. *Прямые A_0A_i и A_3A_i $(i=1,2)$ являются асимптотическими касательными поверхностей (A_0) и (A_3) конгруэнции $V_{2,1}$. Прямолинейная конгруэнция (A_1A_2) гармонична поверхности (A_0)* (*см.:* [4, с. 155]). *Фокусами луча A_1A_2 этой кон-*

груэнции являются единичная точка $\overline{A}_1 + \overline{A}_2$ *и гармоничная ей относительно* A_1 *и* A_2 *точка* $\overline{A}_1 - \overline{A}_2$.

Доказательство. Уравнения асимптотических линий поверхностей (A_0) и (A_3) имеют следующий вид:

$$\omega^1\omega^2 = 0,\ \omega_3^1 \wedge \omega_3^2 = 0\,. \tag{3.8}$$

Уравнение торсов прямолинейной конгруэнции (A1A2) имеет вид

$$(\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 = 0\,. \tag{3.9}$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что точки $\overline{A}_1 + \overline{A}_2$ и $\overline{A}_1 - \overline{A}_2$ — фокусы луча $A_1A_2 \in (A_1A_2)$. Ч. т. д.

п. 3 Конгруэнции $V_{2,2}$

Определение 3.3. *Конгруэнцией* $V_{2,2}$ *называется конгруэнция V, для которой*

$$c_{12} = c_{21} = 0,\ k_{11} = b,\ k_{12} = 1,\ n_2 = a_{12}\,. \tag{3.10}$$

Система уравнений Пфаффа конгруэнции $V_{2,2}$ имеет вид

$$\begin{cases} \omega_1^3 = a_{11}\omega^1 + a_{12}\,\omega^2,\ \omega_2^3 = a_{21}\omega^1 + a_{22}\omega^2, \\ \omega_1^0 = \omega^1 + b\omega^2, \omega_2^0 = b\omega^1 + \omega^2,\ \omega_0^3 = 0,\ \omega_3^0 = 0, \\ \omega_1^2 = c_{11}\omega^1,\ \omega_2^1 = c_{22}\omega^2,\ \omega_3^1 = b\omega^1 + \omega^2, \\ \omega_3^2 = k_{21}\omega^1 + k_{22}\omega^2,\ \omega_1^1 + \omega_2^2 = h_1\omega^1 + h_2\omega^2, \\ \omega_1^0 = \omega^1 + b\omega^2,\ \omega_2^0 = b\omega^1 + \omega^2. \end{cases} \tag{3.11}$$

Условия (3.10) обращают в тождества соотношения (2.1). Следовательно,

$$V_{2,2} \subset V_2\,.$$

Теорема 3.5. *Существуют два класса конгруэнций V2,2 — конгруэнции* $V'_{2,2}$ *и конгруэнции* $V''_{2,2}$. *Конгруэнции* $V'_{2,2}$ *опреде-*

ляются с произволом одной функции двух аргументов, 10 функций одного аргумента и 25 произвольных постоянных. Они удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} &k_{21} + b(b - k_{22}) - 1 = 0, \\ &2(h_1 - bh_2) + c_{22}(b^2 - k_{22}b - 2) = 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Конгруэнции $V''_{2,2}$ *определяются с произволом восьми функций одного аргумента и 23 произвольных постоянных. Они удовлетворяют соотношениям*

$$\begin{aligned} &k_{21} = -1,\ bh_2 = 2h_1,\ b(k_{22} - b) + 2 = 0, \\ &4bm_1 = (b^2 h_2 + c_{11} - 2a_{12} + 2m_2)(1 + b^2). \end{aligned} \tag{3.13}$$

п. 4. Конгруэнции $\mathbf{V_{2,3}}$

Определение 3.4. *Конгруэнцией V2,3 называется конгруэнция V, для которой*

$$c_{12} = 0,\ c_{21} = 0,\ k_{11} = b,\ k_{22} = 1. \tag{3.14}$$

В силу выражения (3.14) соотношения (2.1) обращаются в тождества. Следовательно, $V_{2,3} \subset V_2$.

Теорема 3.6. *Система уравнений Пфаффа*

$$\begin{cases} \omega_1^3 = a_{11}\omega^1 + a_{12}\,\omega^2,\ \omega_2^3 = a_{12}\omega^1 + a_{22}\omega^2, \\ \omega_1^0 = \omega^1 + b\omega^2,\ \omega_2^0 = b\omega^1 + \omega^2, \\ \omega_1^2 = c_{11}\omega^1,\ \omega_2^1 = c_{22}\omega^2,\ \omega_3^1 = b\omega^1 + \omega^2, \\ \omega_3^2 = k_{21}\omega^1 + \omega^2,\ \omega_0^3 = 0,\ \omega_3^0 = 0, \\ \omega_0^0 = m_1\omega^1 + m^2\omega^2,\ \omega_1^1 = n_1\omega^1 + n_2\omega^2. \end{cases} \tag{3.15}$$

— в инволюции и определяет решение с произволом двух функций двух аргументов, 11 функций одного аргумента и 27 произвольных постоянных, причем

$$\text{K}_{12} - \text{k}_{21} + \text{b}(1 - \text{b}) = 0. \tag{3.16}$$

Следовательно, конгруэнции $V_{2,3}$ существуют и определяются с таким произволом.

Список литературы

1. *Малаховский Н. В.* Компьютерное моделирование исследования дифференцируемых многообразий // Дифференциальная геометрия многообразия фигур. Калининград, 2006. Вып. 37.
2. *Малаховский В. С.* Теория конгруэнций кривых и поверхностей второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Калининград, 1996.
3. *Малаховский В. С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1976. Ч. 1.

V. Malakhovsky, E. Jurova

Congruences of ruled quadrics with two double focal surfaces

In three-dimensional projective space P_3 two-parametric families (congruences) V_2 of rouled non-degenerates quadrics Q are investigated. It is proved that such congruences exist and with arbitrariness of five arbitraries functions of two arguments are defined. Using computer-program [1] four sub-classes of such congruences are considered. If points A_1 and A_2 of intersection of lines A_0A_1, A_3A_1 and A_0A_2, A_3A_2 of quadric $Q \in V$ are also focal points than (A_0) and (A_3) are double focal surfaces it is istablished.

УДК 593.3

Т. И. Некипелова, В. Б. Цыренова
Бурятский государственный университет, г. Улан-Удэ

Упругое взаимодействие цилиндра

Вычисляются максимальные локальные напряжения, возникающие в зоне контакта цилиндра с жестким элементом. Начальное решение производится в перемещениях. Для решения задачи используется равномерная сетка по каждому из трех координатных направлений.

Ключевые слова: контактное воздействие, упругие перемещения точек, обобщенный закон Гука, касательные и нормальные напряжения, метод простой итерации, центральная аппроксимация.